

# 垂直抗力・摩擦力・ころがり抵抗をどう教えるべきか

北海道長沼高等学校 石川 昌司

最近、垂直抗力、摩擦力、ころがり抵抗等の基本的な物理概念についての議論がいろいろな機会を通して行われている。それらの状況を簡単に整理し、どのような指導が高校生にとってストンと納得できるのか、筆者なりの考えを述べる。

キーワード 垂直抗力 摩擦力 ころがり抵抗

## 1. はじめに

2013年下半期から2014年上半期にかけて、垂直抗力や摩擦力、ころがり抵抗等について、色々な機会を通じて興味深い議論があった。筆者自身にとっても、自分の理解を改めて考え直す貴重なきっかけとなった。提起された問題を整理し、また、それらに対する筆者の考えを参考までに述べることで、北海道の理科教育の推進に少しでも役立ててもらいたいというのが本稿の目的である。

## 2. 抗力か、または垂直抗力と摩擦力か

垂直抗力を Wikipedia で調べると、「垂直抗力(すいちよくこうりょく、英語: normal force[1], normal reaction[1])とは、物体が接触している他の物体や地面等の固体の面を押しているとき、その力の面に垂直な成分に対し、作用・反作用の法則により、同じ大きさで反対向きの、固体の面が物体を押し返す力。<中略>物体が面を斜めに押しているときに、その力の面に平行な成分に対し、物体が固体の面から受ける反対方向の力を摩擦力という。」となっている。(2014年8月現在)

垂直抗力は、他の物体を接触により押すときの反作用だから、作用点はもちろん他の物体との接点になる。物体が面を真っすぐ押せば、面は物体を真っすぐ押し返す。(図1)

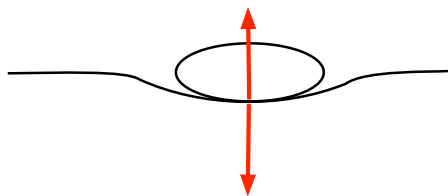


図1

では、物体が面を斜めに押したときの作用と反作用はどうなるだろうか。仮に、面が十分柔らかい材質できていると仮定すると、力の図は次のようになるだろう。(図2)

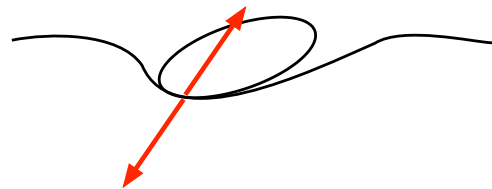


図2

それでは、変形が見ただけではわからない程度に固い面を斜めに押す場合に、面が押し返して来る力はどうなるか。そもそも摩擦がない滑らかな平面の場合は斜めに押すことができないので、斜めに押せるということはその平面にはすでに摩擦があることになる。とすると、高校物理ではきわめてありふれた問題になる。答は垂直抗力と摩擦力の2力となる。

しかし、ここでよく考えてみよう。面を斜めに押す力を作用とするなら、面が押し返す力は反作用である。ならば、反作用は作用と同一直線上の斜めにはたらいていると考えるべきではないだろうか。そもそも、接触した2物体の表面の、原子・分子レベルの相互作用は、接触している“平面”——ミクロな立場での表面は常に凸凹であろう。平面とは、人間的スケールに置き換えて平均した概念と解釈できる。——に対して必ずしも垂直である必要はない。別の言い方をすると、どんなに固い面であろうと、接触点を拡大して見たときに、本質的には図2と同じと考えることができるのではないか。

そこで改めて次のような図を提案する。(図3)

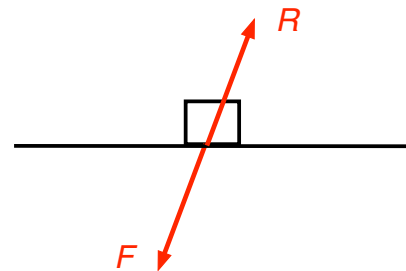


図3

$F$ は、なんらかの方法で物体が面を押す力であり、 $R$ はそ

の反作用である。 $R$  は、通常、抗力と呼ばれる。抗力とは、先の Wikipedia の表現を借りるなら、「物体が面を押しているとき、作用反作用の法則により、同じ大きさで反対向きの、固体の面が物体を押し返す力」（←垂直抗力の場合にあった“垂直な成分に対し”の部分がない）となる。

筆者が本稿で提案したいのは、高校では、現在の主流である最初から垂直抗力と摩擦力を別々に書く方法ではなく、面倒でも2段階に分けて、はじめは抗力だけを書き、その次に垂直抗力と摩擦力に分解するという指導である。

例えば、斜面にのっている物体にはたらく力を考えるときは、次のようになる。

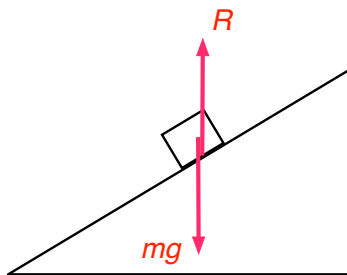


図4

抗力  $R$  は条件や状況によって様々である。

物体が静止または等速直線運動している場合の  $R$  は、大きさが  $mg$  に等しく向きは鉛直上向き、作用線は重力の作用線に重なる。(図4)

物体が加速度運動する場合の  $R$  は、 $mg$  との合力が斜面と平行になるような大きさと向きをもち、その作用線は重力の作用線と重ならない。がしかし、重心は通る。なぜなら、物体が回転しないためには、重心の周りの力のモーメントの和がゼロになる必要があるからである。抗力の作用点は、この性質から逆に求めることができる。(図5)

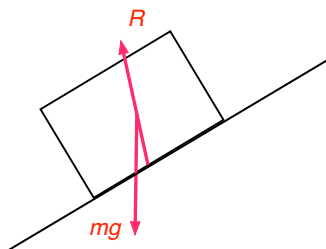


図5

余談であるが、生徒がノートやテストの答案に書く力の図で、垂直抗力と摩擦力が、別の点を作用点として書かれているものが時々あり、以前から気になっていた。これらの生徒は、垂直抗力と摩擦力は、それぞれ別の原因で生じる力と考

えているのかも知れない。はじめは抗力だけを書くように指導することで、このような誤解を減らせることを期待したい。

力の作用点については、高校物理では、これまではあまり重視されてこなかった気がする。しかし、力が“どこから”はたらくのかは、力が“何から”“何に”“どのように”はたらくかに負けず劣らず、正しい力の概念を形成する上で相当重要であるように筆者は思う。垂直抗力と摩擦力の作用点が離れているような図は、定評のある書籍類ではさすがに見たことはないが、例えば、垂直抗力、摩擦力、重力がすべて同じ作用点から出発している図——その方がベクトルを合成するときに便利だからという理由からだろう——は見たことがある<sup>1)</sup>。このような図は教育的ではないので、高校の指導では絶対に書いてほしくないと思う。

最後に、これとよく似た話を紹介してこの節を終わろうと思う。滑らかな斜面上の物体の運動の指導の際、加速度は、垂直抗力と重力の合力により生じると説明すべきところを、重力の斜面下向きの分力により生じるとする説明を時折見かけるが、このような指導は不適切だからやめるべきである、との主張がある。厳格過ぎると思われる向きもあるかも知れないが、ニュートンの第2法則の本来的な意味を考えると、十分肯ける主張である。物理教師は、斜面上の物体の問題を見ると、条件反射的に、重力を斜面の平行方向と垂直方向に分解するが、度が過ぎて、最初から重力を斜面の平行と垂直の2方向に分けた図を書いてしまうと、このような罠に陥りやすくなる。注意が必要である。

### 3. 動く斜面上で垂直抗力がなす仕事

2013年の長谷川・勝田共著論文「2つの物体の力学的エネルギー保存について」<sup>2)</sup> は、非常に興味深い論文であった。

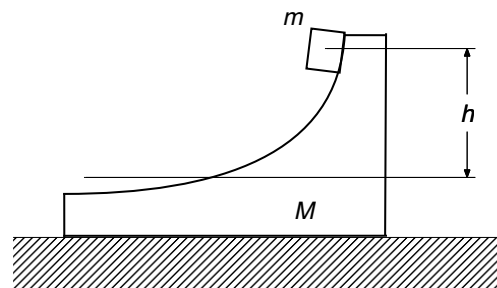


図6

図6のように、水平方向に自由に動くことのできる台車の斜面上で小物体を滑らせるとき、台車と物体がどのような運動をするかを考える。ただし摩擦はどこにもないものとする。普通、この手の問題は、力学的エネルギー保存則と水平方向の運動量保存則の2法則を組み合わせで解く。しかし、長谷

川・勝田は、そのうちの力学的エネルギー保存については、自明とは言えないのではないかという問題意識から出発する。

小物体は台車の斜面上を滑って運動しているが、台車そのものが水平方向に運動しているの、床に静止した観測者から見て、小物体の運動の向きは台車の斜面の向きに一致しない。したがって、小物体に斜面からはたらく垂直抗力  $N_1$  がなす仕事はゼロにはならない。また、台車の斜面に小物体からはたらく垂直抗力  $N_2$  がなす仕事も明らかにゼロではない。したがって、系の力学的エネルギーの和が保存されるためには——どこからも熱が発生しないので“多分”成り立っていると思われるが——  $N_1$  がなす仕事  $W_1$  と、  $N_2$  がなす仕事  $W_2$  の間に、  $W_1 + W_2 = 0$  の関係が成り立つ必要がある。長谷川・勝田は、先の論文中でこの予想が無事成り立つことを、かなり複雑な数学的手続きによって証明している。その概略は次のとおりである。

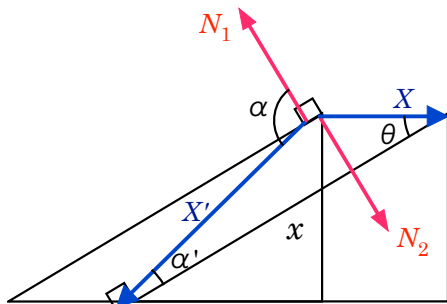


図6

$$W_2 = (N_2 \sin \theta) X$$

余弦定理により

$$\cos \theta = (X^2 + x^2 - X'^2) / (2Xx)$$

したがって

$$W_2 = N_2 X [1 - \{(X^2 + x^2 - X'^2) / (2Xx)\}^2]^{1/2}$$

$$= N_2 \{(-X^4 - x^4 - X'^4 + 2X^2x^2 + 2x^2X'^2 + 2X^2X'^2) / 4x^2\}^{1/2}$$

また

$$W_1 = N_1 X' \cos \alpha = -N_1 X' \sin \alpha'$$

余弦定理により

$$\cos \alpha' = (x^2 + X'^2 - X^2) / (2xX')$$

したがって

$$W_1 = -N_1 X' [1 - \{(x^2 + X'^2 - X^2) / (2xX')\}^2]^{1/2}$$

$$= -N_1 \{(-x^4 - X'^4 - X^4 + 2x^2X'^2 + 2X'^2X^2 + 2x^2X^2) / 4x^2\}^{1/2}$$

作用反作用の法則により  $N_1 = N_2$  . 故に  $W_1 + W_2 = 0$  . 以上、証明終わり。(原論文の文字記号及び式表現のいくつかを変更・・・筆者)

長谷川・勝田は、最後に、このような証明はそのまま生徒

に指導するのは難しい、かと言って、「このような場合においては力学的エネルギーの和は保存されるのだと天啓的に説明」するだけでは「ただ単に式を覚えてそれを用いて問題が解ければいい」といった、生徒の誤った物理観を助長してしまう恐れがある。<中略>したがって、高等学校の物理において、このような問題を安易に用いることは不適切であると私は考える。」と結んでいる。

筆者は、それまで、この種の問題で、垂直抗力が仕事をしないことを疑ってみたことがなかったので、長谷川・勝田の問題意識には大きな感銘を受けた。しかし、両氏の証明は必要以上に複雑すぎる気がした。また、台車の運動が水平方向に限定されているなど、条件が制限されているのもやや気になった。

より簡単かつ制約の少ない条件の下での証明ができないだろうか。筆者は、当時同じ職場にいらした和野健一先生の協力もいただきながら、しばらくこの問題を考え、最終的に次のような私案を作ってみた。

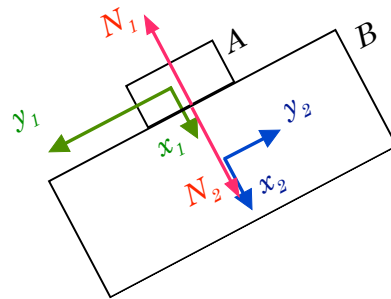


図7

AにBからはたらく垂直抗力を  $N_1$  , BにAからはたらく垂直抗力を  $N_2$  とする。また、Aの変位ベクトルの接触面に対する垂直成分を  $x_1$  平行成分を  $y_1$  , Bについても同様に変位ベクトルの接触面に対する垂直成分を  $x_2$  平行成分を  $y_2$  とする。仕事とは、力と、力の向きへの変位の積である。したがって  $W_1 = -N_1 x_1$  ,  $W_2 = N_2 x_2$  .  $N_1$  と  $N_2$  は作用反作用の関係なので  $N_1 = N_2$  .

さて、ここで「接触を保っている」という言葉の物理的意味を改めて考えてみる。接触面に対する法線方向の、Aの変位  $x_1$  とBの変位  $x_2$  の関係が、  $x_1 < x_2$  ではAとBは離れてしまう。反対に、  $x_1 > x_2$  ではAがBの内部にめり込んでしまう。  $x_1 = x_2$  のときのみ、2物体は変形せずに接触したままとなる。つまり、「接触を保っている」とは、接触面に対する法線方向の変位が互いに等しいことを意味する。

したがって  $W_1 + W_2 = -N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0$  . 以上、証明終わり。AとBの接触面に対する平行方向の変位である  $y_1$  ,

$y_2$ については何も制限はない。

筆者は、これなら高校生もなんとか理解できるのではない  
かと思っているのだが、どうだろうか。

#### 4. 抗力の作用点の移動

第1節で述べたように、外力なしで静止している物体には  
たらく抗力は、大きさが重力に等しく向きは鉛直上向き、作  
用線は重力の作用線に重なる。

摩擦の大きな平面上に物体を置き、この平面を最初水平な  
状態から始めて次第に傾きを大きくしていく。重力の作用線  
が物体と平面の接触面の角の外に飛び出すとき、物体はこの  
角を回転の軸として回転し始める。(この直前の、斜面が水  
平となす角度を「転倒角」という。)

次に、同じく摩擦の大きな水平面上に物体を載せ、水平向  
きの外力を最初は小さな力から始めて次第に大きくしてい  
くときに、いつ物体が転倒するかを考える。この問題は、斜  
面で物体を転倒させる問題と本質的に同じであるから、重力  
と外力の合力の作用線が底面の角を越えて外にはみ出ると  
きに転倒が始まるといえる。この教材は、今回改定の学習指  
導要領の下で、新たに高校物理で取り扱われることになった。  
教科書の説明を見てみる。

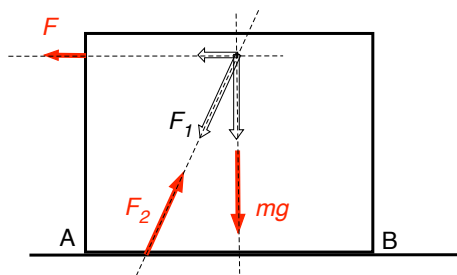


図8

「引く力を大きくしていくと、 $F_2$  (=抗力) の作用点は点A  
に向かって移動していき、やがて点Aに達する。さらに引く  
力を大きくしていくと、 $F_1$  (=重力と外力の合力) の作用線  
は下面ABをはみ出し、物体は点Aのまわりに回転して傾き  
始める。」<sup>3)</sup> ( )は筆者の加筆

“作用点が移動する”とは具体的にどういうことなのか。  
そもそも力は移動するものなのか。下手をすると、生徒に「物  
理はご都合主義だ」と言われそうで心配である。

しかし、この違和感は、物体の底が平面ではなく、物体が  
2本足で床の上に“立って”いるイメージに置き換えてみる  
とかなり軽減することがわかる。

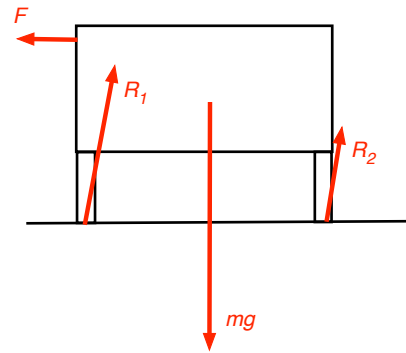


図9

図9のように、床から左足にはたらく抗力を  $R_1$ 、右足には  
たらく抗力を  $R_2$  とする。物体の形は左右対称とする。外力  
を加える前は  $R_1$  と  $R_2$  の大きさは等しい。ここで外力  $F$  を水  
平左向きに加えると、 $R_1$ 、 $R_2$  は傾くと同時に、 $R_1$  の大き  
さは大きくなり  $R_2$  の大きさは小さくなる。加える外力の大き  
さを次第に大きくすると  $R_1$  と  $R_2$  の大きさの差もどんどん広  
がっていき、そしてついに  $R_2=0$  になったとき、この物体  
は回転し始める。

2本の抗力のイメージの方が、最初の、1本の抗力のイメ  
ージよりも、理解しやすかったのではないだろうか。しかし、  
平らな底面の形を勝手に2本足に改造してしまったのだから、  
最初とは別の問題になってしまっている。ならば、足の  
数をもっと増やし、100本とか1000本とか、あるいはもっ  
とそれ以上の数の足を物体の底面全体につけるとよい。足の  
数が無限に達した時、底面は元の平らな状態に戻ると考えて  
良いだろう。抗力はこれら小さな足のひとつひとつにはたら  
く。物体の上部に水平に外力が加えられたとき、物体が転倒  
しないためには、これら無数の足にはそれぞれの場所ごとに  
決められたある向きと大きさの抗力がはたらいっている必要  
がある。

底面に分布する小さな抗力の分布を、勝手に「抗力密度」  
と呼ぶことにする。抗力密度が一様であれば、その合力の作  
用点は中点になる。しかし、抗力密度に偏りが生じると、そ  
の合力の作用点は中点からはずれた位置になる。まさに、抗  
力の作用点が移動するとは、抗力密度の状態が変化すること  
と言い換えることができる。このように考えると、少しは分  
かりやすくなるのではないだろうか。

#### 5. タイヤのころがり抵抗

2013年12月~2014年1月頃にかけて、北海道高等学校理  
科研究会(略称:北理研)物理メーリングリスト上で、ころ  
がり抵抗に関する議論があった。摩擦のある水平面を、自動  
車が等速直線運動している場合に、自動車のタイヤと路面の

間でどのような力がかかっているのかという問題を考えている途中のことであった。当初、筆者は、タイヤと路面は1点で接地し、この点からはたらく抗力が傾くことでころがり抵抗を説明しようとしていた。ところが、しばらくして、留辺蘂高校の安東周作先生から、1点接地のモデルではころがり抵抗は説明できないのではないかというご指摘をいただいた。なぜなら、タイヤの最下点を作用点とし進行方向に対して逆向きに傾いた抗力では、タイヤに順方向回転のトルクが発生してしまい事実と矛盾するからである。たいへん的を得たご意見であった。

そうしてみると、確かに空気が減って接地面積が大きいタイヤの方が、空気がパンパンに詰まっていた接地面積の小さいタイヤよりもころがり抵抗が大きいことは経験的にもよく知られていることであり、1点接地のモデルでは転がり抵抗を説明するには無理があることは明らかだった。しかし、タイヤと平面の間で有限な接地面積を考えたとしても、任意の瞬間でタイヤの周方向の変形は前後でほとんど対称だと考えると、どのような原理でタイヤに進行方向と逆回転向ききのトルクが生じるのかが疑問だった。

2014年4月に、同じ職場の花光隆太朗先生が日本自動車タイヤ協会のホームページ<sup>4)</sup>の資料を持ってきてくれた。そこには、タイヤに用いられるゴムについて、粘弾性という専門用語とともに次のようなグラフが載っていた。(図10)

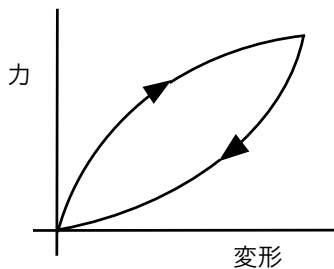


図10

このような性質は、一般にヒステリシス(履歴効果)と呼ばれる。筆者は「これだ」と思った。

前述のように、タイヤと平面の接触部分において、タイヤの周方向の変形の程度は、ほぼ前後対称と考えてよい。しかし、接地面の前部と後部では、ゴムのヒステリシスの関係で、前部のゴムの弾性力の大きさの方が、後部のゴムの弾性力の大きさよりも少しだけ大きくなっている。言い方を変えると、前節で述べた「抗力密度」が偏った状態になっている。図に書くと次のようなイメージになる。(図11)

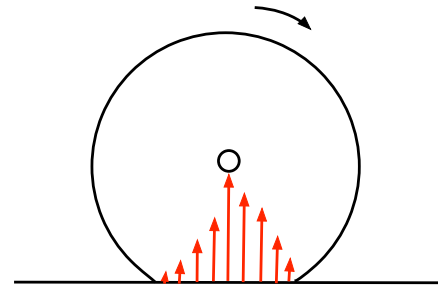


図11

このように考えると、抗力密度の合力すなわち最終的な抗力の作用点は、接地面の中央ではなく少し前方にずれたポイントになる。その結果、タイヤには、逆回転向ききのトルクが生じる。

筆者は、現時点で、前述の“抗力の傾き”とともに、これがころがり抵抗の原因だろうと考えているのだが、どうだろうか。

## 6. まとめにかえて・・・謝辞

小樽桜陽高校を2014年に退職された和野健一先生、長沼高校の花光隆太朗先生には、お忙しい中にも関わらず、直接、多くのヒントをいただきました。また、留辺蘂高校の安東周作先生、根室高校の佐々木徹先生からは北理研研究大会若小牧大会(2014.8)等で貴重な意見をいただきました。みなさまに、この場を借りて感謝申し上げます。

## 引用文献

- 1) 例えば、キッテル、他：パークレー物理学コース1「力学(上)」丸善(1975) p105・・・質点の力学の章なのであえてそうしているのかも知れない。
- 2) 長谷川大和、勝田仁之：「2つの物体の力学的エネルギーの保存について」物理教育 61-3 (2013) p137
- 3) 國友正和、他 10名：高等学校教科書「物理」数研出版
- 4) 日本自動車タイヤ協会 HP <http://www.jatma.or.jp>
- 5) 石川昌司：「垂直抗力・摩擦力・ころがり抵抗について」北海道高等学校理科研究会「北海道の理科」第57号(2014)